Wytrzymałość konstrukcji 1

Wykład 3

Stan odkształcenia

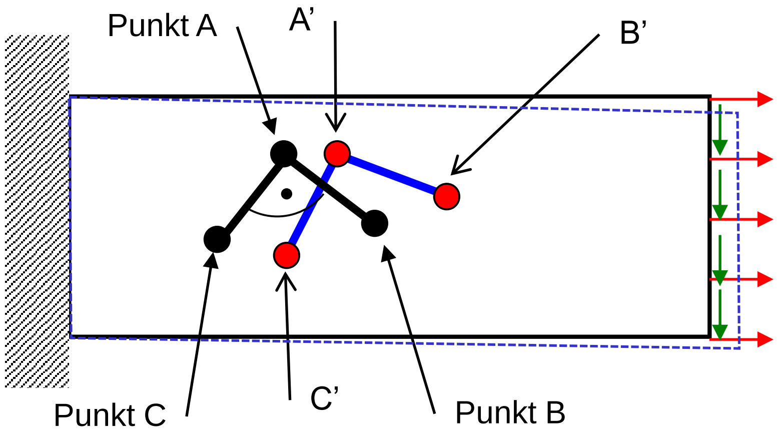
Przemieszczenie a odkształcenie

Uproszczona analiza stanu odkształcenia

Pole przemieszczeń a pole odkształceń

Dr hab. inż. Piotr Marek

Przemieszczenia a odkształcenia



Rozważmy cienką tarczę prostokątną umocowaną jednym końcem i obciążoną na przeciwległym brzegu

Długość odcinka AB: $\left|\overline{AB}\right| = l$

Długość odcinka A'B': $\left|\overline{A'B'}\right| = l + \Delta l$

Przemieszczenie punktu A: $\overrightarrow{AA'}$

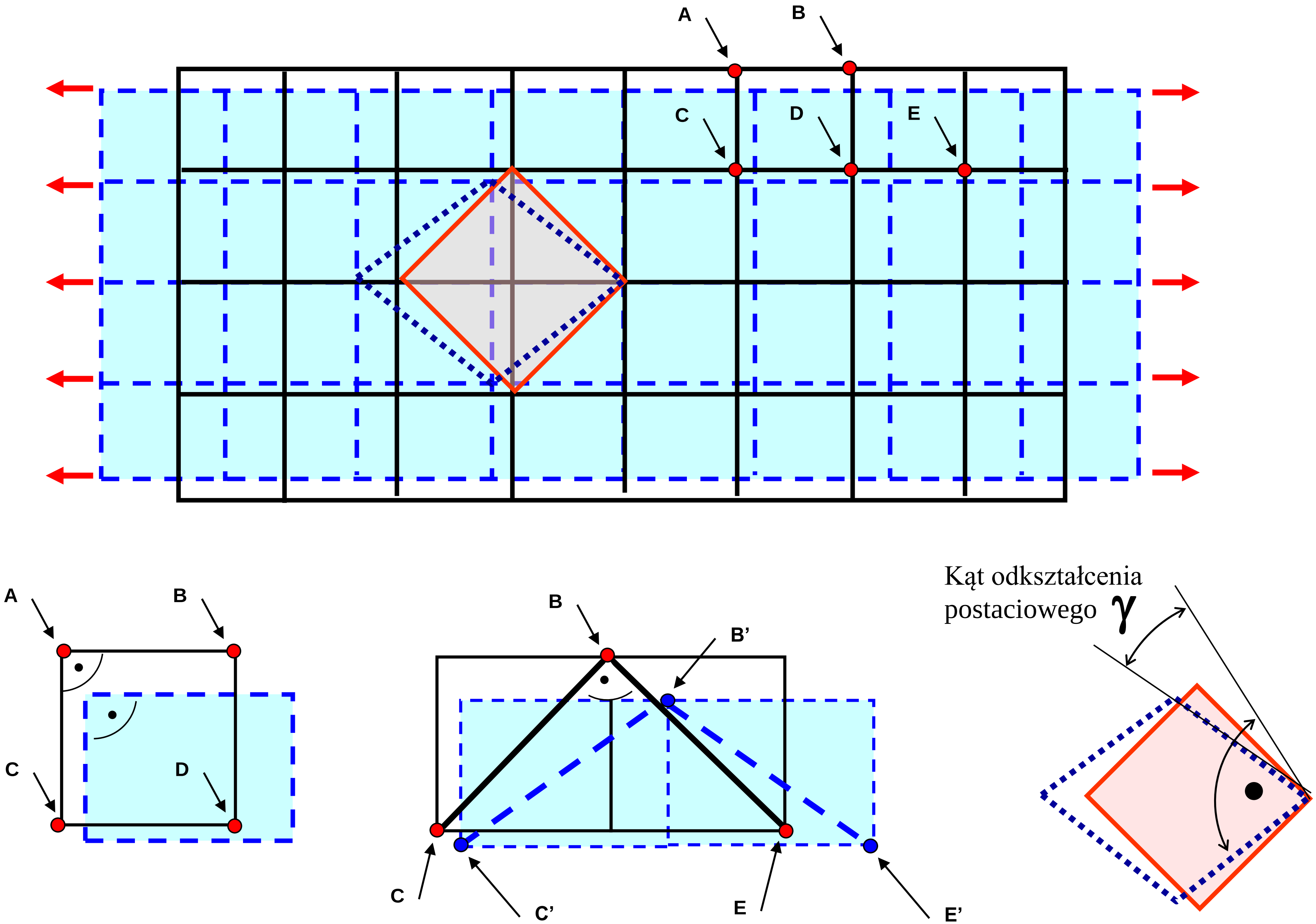
Średnie względne wydłużenie odcinka AB: $\varepsilon_{śr} = \dfrac{\left|\overline{A'B'}\right| - \left|\overline{AB}\right|}{\left|\overline{AB}\right|} = \dfrac{l + \Delta l - l}{l} = \dfrac{\Delta l}{l}$

Odkształcenie liniowe (wydłużenie względne) w p. A w kierunku odcinka AB: $\varepsilon = \lim\limits_{l \to 0} \dfrac{\Delta l}{l}$ (bezwymiarowe, ‰)

Średnie odkształcenie kąta CAB: $\gamma_{śr} = \angle CAB - \angle C'A'B'$

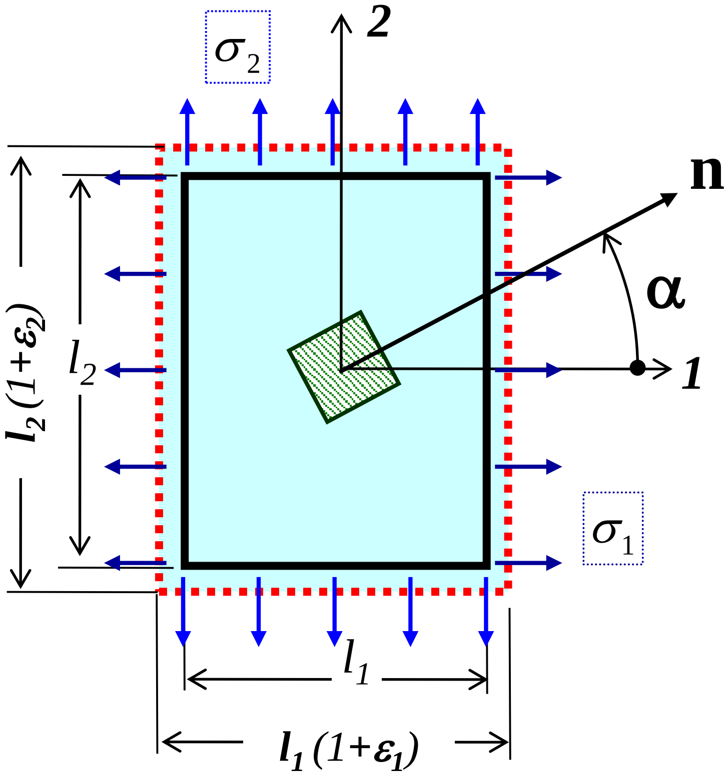
Kąt odkształcenia postaciowego w p.A: $\gamma = \lim\limits_{|AB| \to 0, |AC| \to 0} \left(\angle CAB - \angle C'A'B' \right)$

Przemieszczenia a odkształcenia



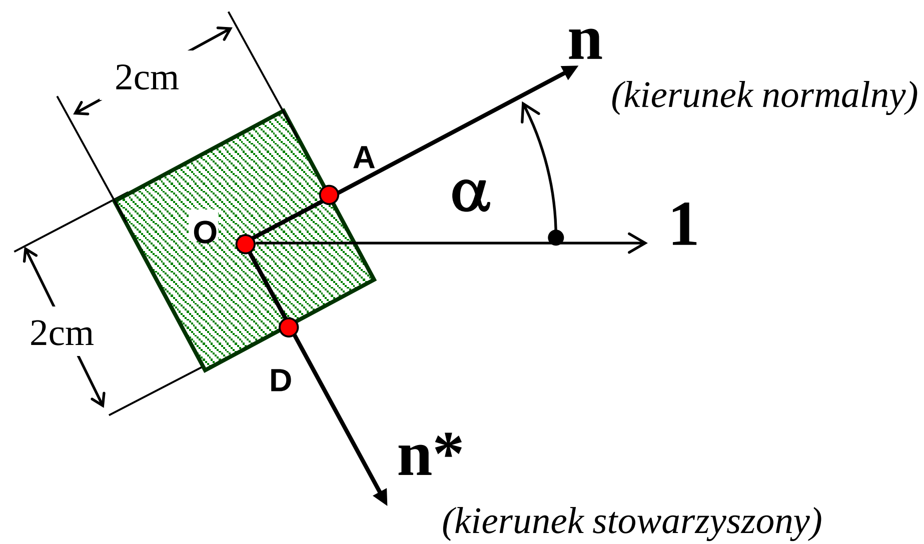
Uproszczona analiza stanu odkształcenia

Rozważmy cienką tarczę pracującą w stanie naprężeń głównych

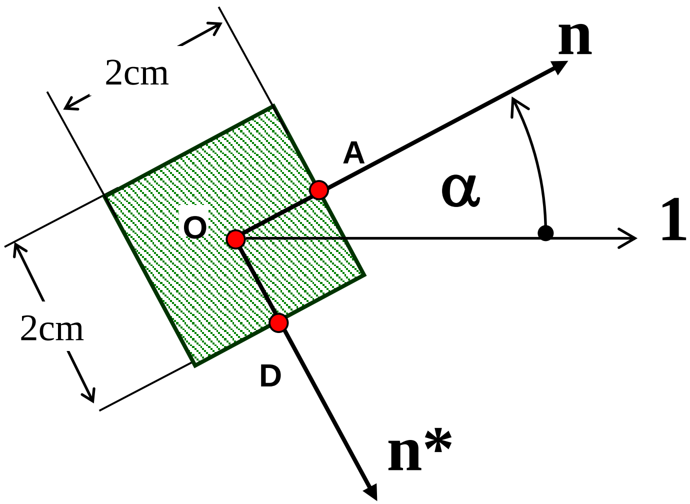


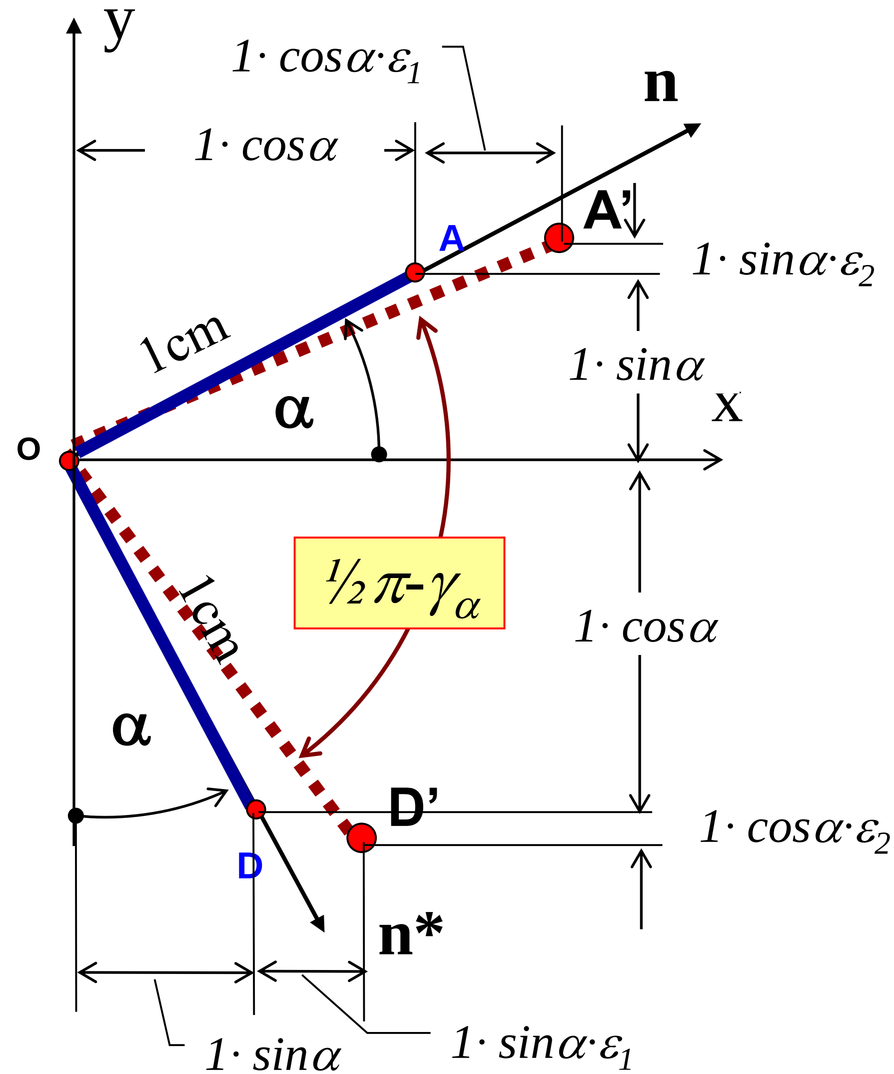
Na skutek rozciągania tarcza odkształci się i stanie się prostokątem o nowych wymiarach

Wyobraźmy sobie w środku tarczy obszar o kształcie kwadratu (*o długości boku 2cm*) obrócony o kąt $\boldsymbol{\alpha}$ do kierunku ***1*** *(co wskazuje normalna* ***n****)*



Uproszczona analiza stanu odkształcenia



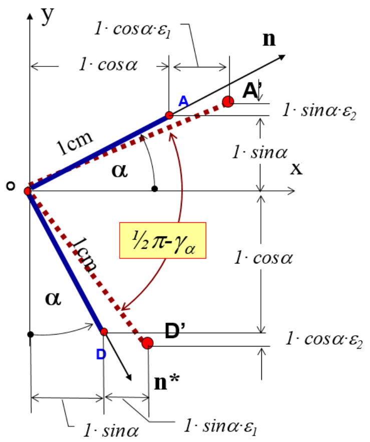


Współrzędne punktu **A'** ($x_{A'}$, $y_{A'}$) :

$$x_{A'} = (1+\varepsilon_1)\cdot\cos\alpha$$
$$y_{A'} = (1+\varepsilon_2)\cdot\sin\alpha$$

Współrzędne punktu **D'** ($x_{D'}$, $y_{D'}$) :

$$x_{D'} = (1+\varepsilon_1)\cdot\sin\alpha$$
$$y_{D'} = -(1+\varepsilon_2)\cdot\cos\alpha$$



Uproszczona analiza stanu odkształcenia

$$x_{A'} = (1+\varepsilon_1)\cdot\cos\alpha \qquad y_{A'} = (1+\varepsilon_2)\cdot\sin\alpha$$

$$x_{D'} = (1+\varepsilon_1)\cdot\sin\alpha \qquad y_{D'} = -(1+\varepsilon_2)\cdot\cos\alpha$$

$$\left|\overline{OA'}\right| = \sqrt{x_{A'}^2 + y_{A'}^2} = \sqrt{\left(1+2\varepsilon_1+\cancel{\varepsilon_1^2}\right)\cos^2\alpha + \left(1+2\varepsilon_2+\cancel{\varepsilon_2^2}\right)\sin^2\alpha} =$$

Małe wyższego rzędu

$$= \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 2\varepsilon_1\cos^2\alpha + 2\varepsilon_2\sin^2\alpha} \approx 1+\varepsilon_1\cos^2\alpha + \varepsilon_2\sin^2\alpha$$

$$\sqrt{1+a} \approx 1+\tfrac{1}{2}a \qquad a \ll 1$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\left|\overline{OA'}\right| - \left|\overline{OA}\right|}{\left|\overline{OA}\right|} = \frac{1+\varepsilon_1\cos^2\alpha + \varepsilon_2\sin^2\alpha - 1}{1} \rightarrow \boxed{\varepsilon_\alpha = \varepsilon_1\cos^2\alpha + \varepsilon_2\sin^2\alpha}$$

$$\angle A'0D': \quad \overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OD'} = \left|\overline{OA'}\right|\cdot\left|\overline{OD'}\right|\cdot\cos\angle A'OD' = \cos\angle A'OD' = x_{A'}\cdot x_{D'} + y_{A'}\cdot y_{D'}$$

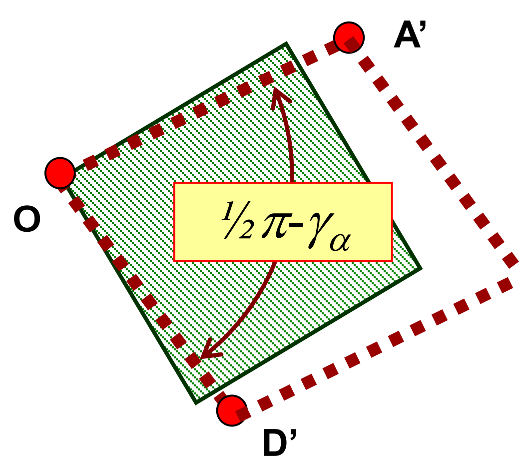
$$\cos\angle A'OD' = (1+\varepsilon_1)^2\sin\alpha\cos\alpha - (1+\varepsilon_2)^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\gamma_\alpha\right) = \left(1+2\varepsilon_1+\varepsilon_1^2-1-2\varepsilon_2-\varepsilon_2^2\right)\sin\alpha\cos\alpha$$

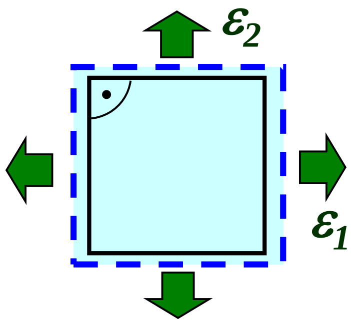
$$\sin\gamma_\alpha \cong 2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\boxed{\gamma_\alpha = (\varepsilon_1-\varepsilon_2)\sin 2\alpha}$$

Kąt odkształcenia postaciowego

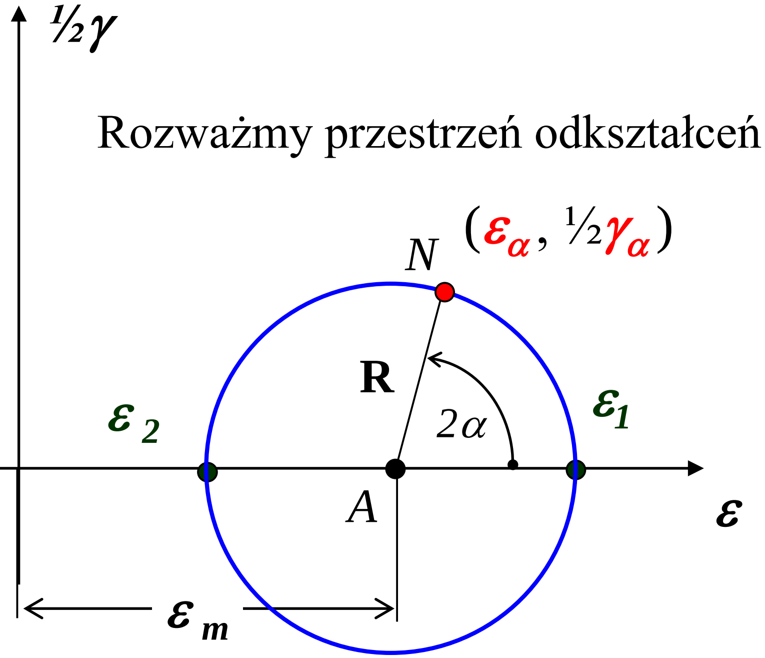


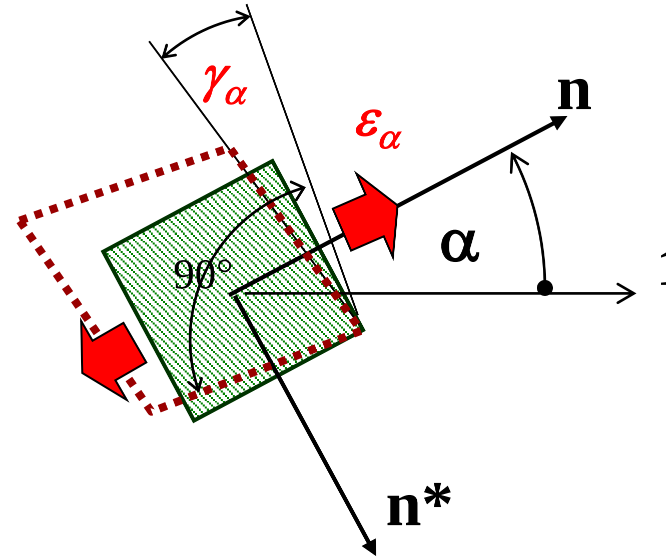
Koło Mohra dla stanu odkształcenia



Stan odkształceń głównych

Rozważmy przestrzeń odkształceń:





$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$$

$$R = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}$$

Sprawdzamy wzory transformacyjne:

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_m + R \cdot \cos 2\alpha$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varepsilon_1}{2}\left(1 + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + \frac{\varepsilon_2}{2} \cdot \left(1 - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)$$

$$\boxed{\varepsilon_\alpha = \varepsilon_1 \cdot \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \cdot \sin^2\alpha}$$

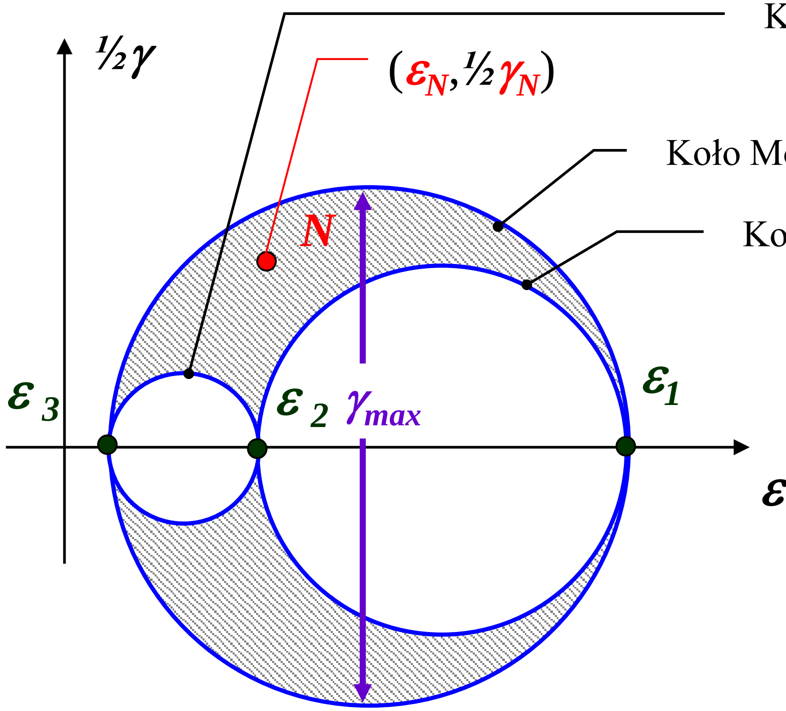
$$\tfrac{1}{2}\gamma_\alpha = R \cdot \sin 2\alpha$$

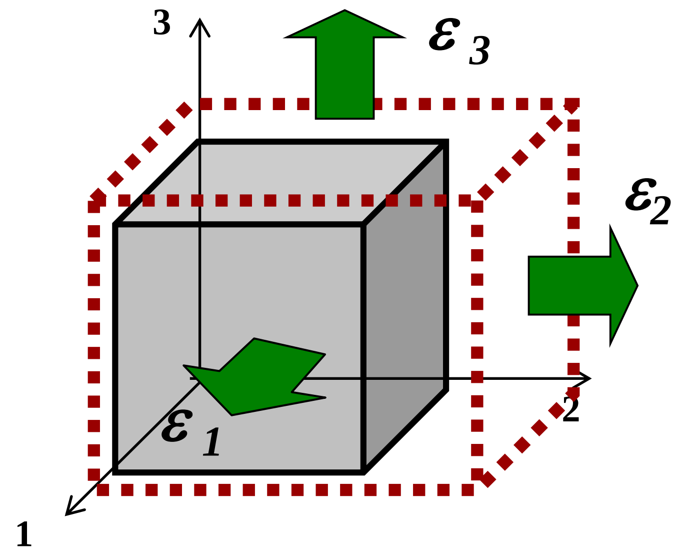
$$\boxed{\gamma_\alpha = \left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right) \cdot \sin 2\alpha}$$

Wyszło to samo co we wzorach transformacyjnych!

Punkt N reprezentuje więc stan odkształcenia dla przekroju o normalnej w kierunku $\boldsymbol{\alpha}$ *do kierunku 1*

Uproszczona analiza stanu 3D





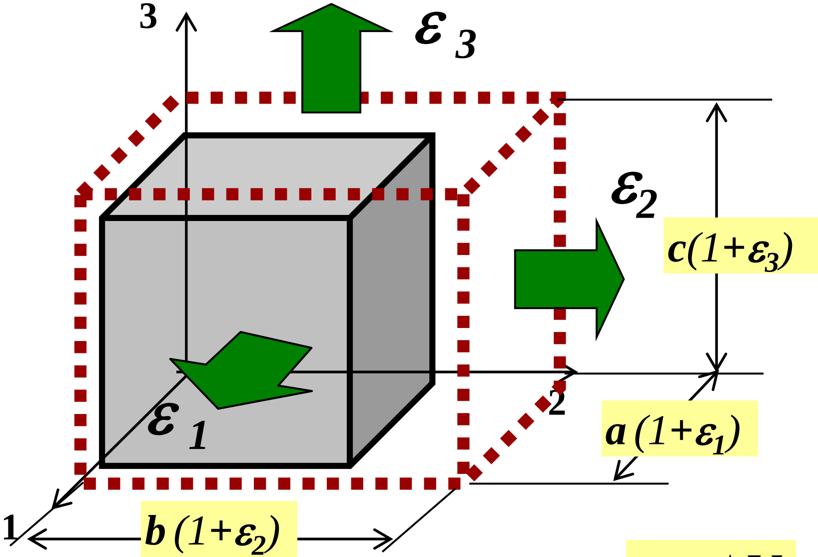
W Teorii Sprężystości dowodzi się, że punkt ***N*** leży w polu zakreskowanym między kołami w przestrzeni odkształceńń

$$\boxed{\gamma_{\max} = \left|\varepsilon_1 - \varepsilon_3\right|}$$

Max. kąt odkształcenia postaciowego

Jeśli w zadaniu odwrotnym *(poszukiwania odkształceń głównych)* na jednym z kierunków mamy odkształcenia główne, to możliwe jest rozwiązanie zadania z wykorzystaniem schematu kół Mohra.

Uproszczona analiza stanu 3D



Względna zmiana pola:
(odkształcenie powierzchniowe)

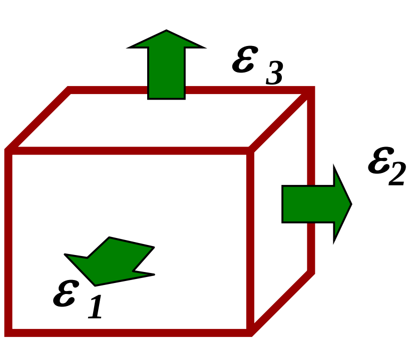
$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{(1+\varepsilon_1)a\cdot(1+\varepsilon_2)b - ab}{ab} \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

Względna zmiana objętości:
(odkształcenie objętościowe)

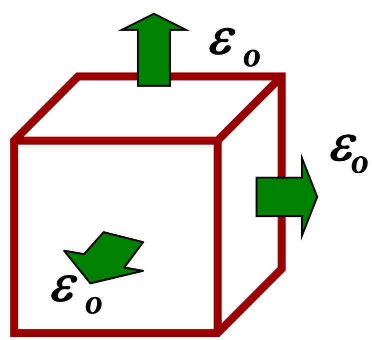
$$e = \frac{\Delta V}{V} = \frac{(1+\varepsilon_1)a\cdot(1+\varepsilon_2)b\cdot(1+\varepsilon_3)c - abc}{abc} \approx \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Stan odkształcenia można przedstawić jako superpozycję:

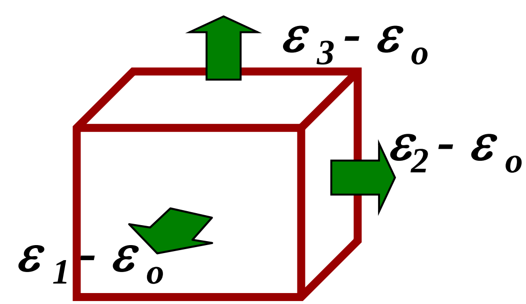
$$\varepsilon_0 = \tfrac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$



=



+

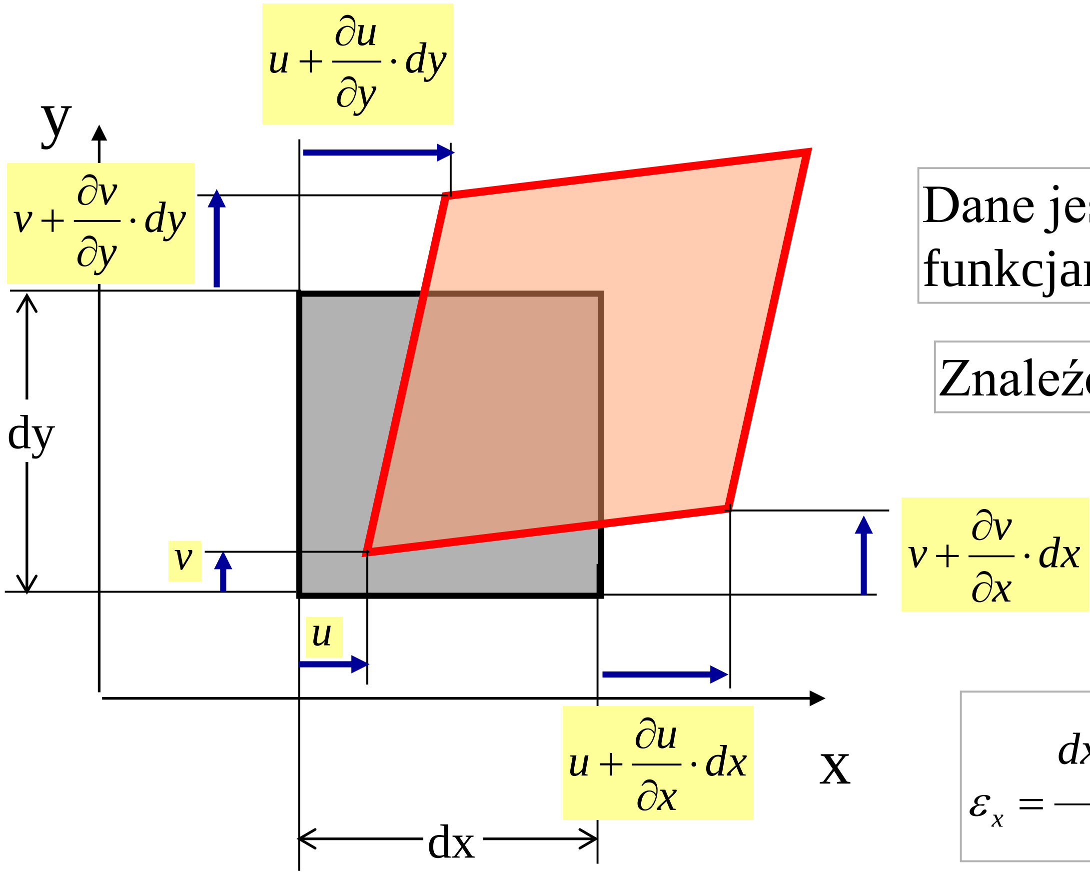


$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$

$e = 3\varepsilon_0$ Odkształcenie objętościowe

$\boxed{e = 0}$ Odkształcenie postaciowe

Pole przemieszczeń a pole odkształceń



Dane jest pole przemieszczeń dane funkcjami: ***u****(x,y) i* ***v****(x,y)*

Znaleźć pole odkształceń

$$\varepsilon_x=\frac{dx+u+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx-u-dx}{dx}$$

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y=\frac{dy+v+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot dy-v-dy}{dy}$$

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{v+\frac{\partial v}{\partial x}\cdot dx-v}{dx}+\frac{u+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy-u}{dy}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$$